Početní část 1 - 25.1.2021

1. Nejdříve předpokládejme, že existuje vlastní limita, tj.

$$\lim_{n\to\infty} a_n =: L \in \mathbb{R}.$$

Potom ovšem můžeme použít rekurentní vzorec a větu o limitě součtu a součinu a odvodit, že

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2 + 10}{11} = \frac{L^2 + 10}{11}$$

a tedy nutně musí platit

$$0 = L^2 - 11L + 10 = (L - 10)(L - 1) \implies L = 1, 10.$$

Pokud tedy existuje vlastní limita, pak máme dvě možnosti.

Nyní se budeme věnovat tomu, kdy limita existuje. K tomu využijeme znalost toho, že monotóní posloupnost má vždy limitu a pokud je posloupnost omezená, tak je limita vlastní. Výpočtem několika prvních bodů můžeme dojít k doměnce, že posloupnost bude klesající a zdola omezená.

Nejdříve se soustředíme na to, kdy může být daná posloupnost omezená. Okamžitě vidíme, že $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Protože ale je bod 1 možnou limitou, uvažujeme $a_n \in (1, 10)$ a zajímá nás, kdy

$$a_{n+1} > 1.$$

To můžeme upravit (pro $a_n > 0$) jako

$$a_{n+1} > 1 \iff \frac{a_n^2 + 10}{11} > 1 \iff a_n^2 > 1 \iff a_n > 1.$$

Ihned tedy vidíme, že (pomocí matematické indukce)

$$(a_0 \in (1, 10)) \implies (\forall n \in \mathbb{N} : a_n > 1).$$

Dále nás bude zajímat, kdy

$$a_{n+1} < a_n$$

Použitím rekurentní formule máme

$$a_{n+1} < a_n \iff \frac{a_n^2 + 10}{11} < a_n \iff (a_n - 10)(a_n - 1) < 0 \iff a_n \in (1, 10).$$

Vidíme tedy (s využitím předchozího kroku), že pokud $a_0 \in (1, 10)$, pak bude celá posloupnost klesající a musí tedy mít limitu (možno i nevlastní).

Celkem dostáváme

$$a_0 \in (1,10) \implies \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je nerostoucí a omezená zdola 1.}$$

Konečně můžeme použít větu o limitě monotóní posloupnosti a vidíme, že pokud $a_0 \in (1,10)$ pak je posloupnost monotóní a omezená a má tedy vlastní limitu. Na výběr máme pouze 1 a 10. Nicméně vidíme, že pokud $a_n \in (1,10)$ pak je posloupnsot klesající a tedy limita musí být rovna jedné, tedy

$$a_0 \in (1,10) \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

2.

$$f(x) := \frac{|x|}{\sqrt{3}} + \sqrt{1-(||x|-2|-1)^2}$$

Funkce je sudá. Definiční obor druhé odmocniny jsou nezáporná čísla a tedy musí platit, že

$$1-(||x|-2|-1)^2 \Leftrightarrow x \in [-4,4].$$

Máme tedy $D_f = [-4,4]$. Funkce je na svém definičním oboru jistě spojitá. Pro pozdější účely je dobré si všimnout, kdy

$$1-(||x|-2|-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-4,-2,2,4\}.$$

Dále spočteme první a druhou derivaci. Uvažujeme $x \neq -4,-2,0,2,4$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{3}} - \frac{(||x|-2|-1)(\operatorname{sgn}(|x|-2))\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-(||x|-2|-1)^2}} \\
f''(x) &= -\frac{(||x|-2|-1)^2}{(1-(||x|-2|-1)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{(1-(||x|-2|-1)^2)}} \\
&= -\frac{1}{(1-(||x|-2|-1)^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Ještě spočteme jednostranné limity první derivace ve význačných bodech.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -4_+} f'(x) &= -\lim_{x\to 4_-} f'(x) = -\infty \\
\lim_{x\to 0_\pm} f'(x) &= \frac{\pm 1}{\sqrt{3}} \pm \lim_{x\to 0_\pm} \frac{(||x|-2|-1)}{\sqrt{1-(||x|-2|-1)^2}} = \pm\infty \\
\lim_{x\to 2_\pm} f'(x) &= \lim_{x\to -2_\pm} f'(x) = \pm\infty.
\end{aligned}$$

Vidíme tedy, že první a druhá derivace (popř. jdednostraná) neexistují v bodech $x = \pm 4, \pm 2, 0$. Navíc evidentně $f'' < 0$ všude, kde je definovaná a tak je

f na každém z intervalů, kde existuje druhá derivace konkávní. Určíme ještě nulové body první derivace.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{(||x|-2|-1)(\mathrm{sgn}(|x|-2))}{\sqrt{1-(||x|-2|-1)^2}}$$
$$\implies \frac{1-(||x|-2|-1)^2}{3} = (||x|-2|-1)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = |||x|-2|-1|.$$

Poslední rovnost má následující řešení $|x| = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$. Protože jsme však použili neekvivalentní úpravu, vidime, že původnimu zadání odpovídají pouze

$$|x| = \frac{3}{2}, \frac{7}{2}.$$

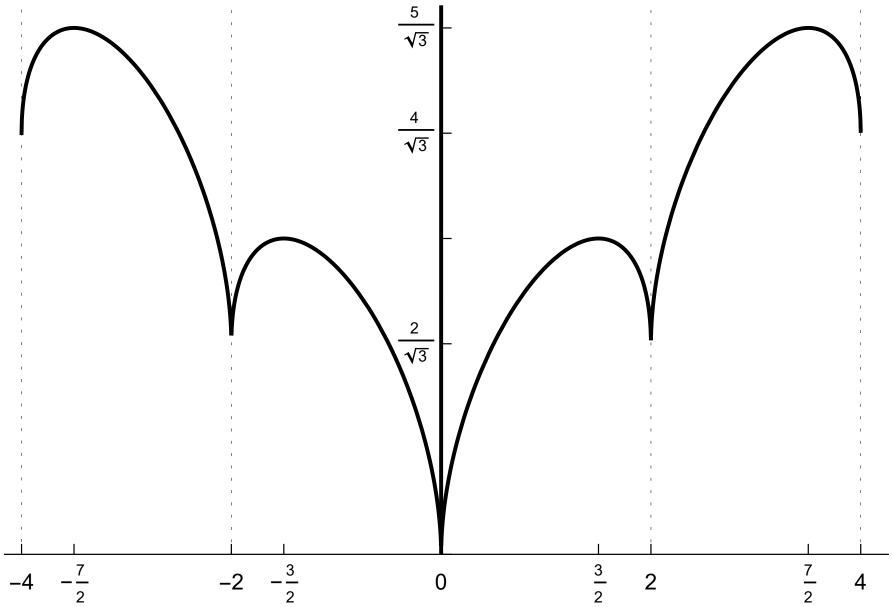
Navíc vidíme, že

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \quad & x \in (-4, -\tfrac{7}{2}) \cup (-2, -\tfrac{3}{2}) \cup (0, \tfrac{3}{2}) \cup (2, \tfrac{7}{2}), \\ f'(x) < 0 \quad & x \in (-\tfrac{7}{2}, -2) \cup (-\tfrac{3}{2}, 0) \cup (\tfrac{3}{2}, 2) \cup (\tfrac{7}{2}, 4). \end{aligned}$$

Funkce f je tedy rostoucĺ na intervalech $(-4, -\frac{7}{2}) \cup (-2, -\frac{3}{2}) \cup (0, \frac{3}{2}) \cup (2, \frac{7}{2})$ a klesající na $(-\frac{7}{2}, -2) \cup (-\frac{3}{2}, 0) \cup (\frac{3}{2}, 2) \cup (\frac{7}{2}, 4)$. V bodech ± 4, ± 2 a 0 jsou lokální minimima a v bodech $\pm\frac{3}{2}$ a $\pm\frac{7}{2}$ lokální maxima. O globálních extrémech rozhodneme porovnáním funkčních hodnot.

$$\begin{aligned} & f(\pm 4) = \tfrac{4}{\sqrt{3}}, \quad f(\pm 2) = \tfrac{2}{\sqrt{3}}, \quad f(0) = 0, \\ & f(\pm\tfrac{3}{2}) = \sqrt{3}, \quad f(\pm\tfrac{7}{2}) = \tfrac{5\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Globální minimum je tedy nabýváno v bodech $\pm\frac{7}{2}$ a je rovno $\frac{5}{\sqrt{3}}$, globální minimum je 0 a nabývá se v bodě 0. Obor hodnot je tedy $H_f = [0, \frac{5\sqrt{3}}{3}]$.



$\frac{5}{\sqrt{3}}$
$\frac{4}{\sqrt{3}}$
$\frac{2}{\sqrt{3}}$
-4
$-\frac{7}{2}$
-2
$-\frac{3}{2}$
0
$\frac{3}{2}$
2
$\frac{7}{2}$
4